Cvičení MAI3 – Mocninné řady

Základní „informace“:

mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$; $a_n, z_0 \in \mathbb{C}$ (*)

konverguje buď (i) v $\mathbb{C}$

nebo (ii) jen v $z_0 \in \mathbb{C}$

nebo (iii) $\exists R>0$ tak, že řada konverguje

v $K(z_0,R) = \{z \in \mathbb{C};\ |z-z_0|<R\}$

(kruh konvergence) a diverguje pro

$\forall z,\ |z-z_0|>R$

(R – poloměr konvergence mocninné řady (*))

(pro případ (i) $R=+\infty$, (ii) $R=0$)

Zjišťování poloměru konvergence mocninné řady (*)

obecně: $$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$; (zde $\frac{1}{0}=\infty$ a $\frac{1}{\infty}=0$)

pokud existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, pak $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$; dále,

pokud existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, je $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Vzorce pro výpočet R vyplývají z Cauchyho, resp. limitního Cauchyho, resp. limitního D'Alembertova kritéria pro zjišťování absolutní konvergence, resp. divergence řady (*).

Při hledání R lze místo vzorců pro výpočet R zjistit, kde řada konverguje, resp. diverguje pomocí uvedených kritérií, a odtud zjistíme i R.

Vlastnosti mocninných řad (R>0 nebo R=+∞)

1) v $K(z_0,R)$ mocninná řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně;

2) součet mocninné řady je funkce spojitá v $K(z_0,R)$;

3) součet mocninné řady má v $K(z_0,R)$ derivace všech řádů (derivace je dána mocninnou řadou, vzniklou z původní tzv. "derivováním člen po členu" - tato řada má stejný poloměr konvergence);

4) řada, vzniklá integrováním mocninné řady "člen po členu" má stejný poloměr konvergence jako původní řada a její součet je primitivní fcí k součtu původní řady v $K(z_0,R)$;

5) Je-li $f(z) = \sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n$ v $U(z_0,\delta)$, pak $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$,

tj. mocninná řada je Taylorovou řadou fce f

6) pro $|z-z_0|=R$ $(R>0)$ nic obecně nevíme o konvergenci řady, je třeba zde chování řady vyšetřit zvlášť:

(i) platí: $\sum_0^\infty |a_n|R^n$ konverguje $(R>0)$, pak řada

$\sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n$ konverguje všude na kružnici $|z-z_0|=R$, a to absolutně.

(tj. konverguje-li mocninná řada absolutně pro nějaké $\bar{z}$, $|\bar{z}-z_0| = R$ ($R>0$ poloměr konvergence), pak konverguje absolutně pro vš. $z\in\mathbb{C}$, $|z-z_0|=R$, tj. na hranici kruhu konvergence)

(ii) najdeme-li na kružnici $|z-z_0|=R$ bod, kde řada diverguje, pak je třeba vyšetřovat konvergenci neabsolutní v bodech na kružnici - viz Abelovo a Dirichletovo kritérium neabs. konvergence (přednáška)

(iii) <u>Abelova věta</u> – pro mocninnou řadu $\sum_0^\infty a_n x^n$ ($a_n, x \in \mathbb{R}$)
(bez újmy na obecnosti $x_0=0$)

$\sum a_n R^n$ konverguje, pak $\sum_0^\infty a_n x^n$ konverguje stejnoměrně na $\langle 0, R\rangle$ a funkce $f(x)=\sum_0^\infty a_n x^n$ je spojitá v $R-$,
tj. $\lim\limits_{x\to R-} \sum_0^\infty a_n x^n = \sum_0^\infty a_n R^n$.

<u>Cvičení</u>

1) <u>Problémy:</u> – dokažte:

(i) konverguje-li absolutně řada $\sum_0^\infty a_n R^n$ $(R>0)$ (tj. $\sum_0^\infty |a_n| R^n$),
pak řada $\sum_0^\infty a_n (z-z_0)^n$ konverguje absolutně pro $|z-z_0|=R$
(R – poloměr konvergence řady)

(ii) Je-li $R>0$ poloměr konvergence řady $\sum_0^\infty a_n (z-z_0)^n$, pak,
konverguje-li absolutně řada $\sum_0^\infty a_n R^n$,
řada $\sum_0^\infty a_n (z-z_0)^n$ konverguje stejnoměrně na
$\overline{K(z_0,R)} = \{ z \in \mathbb{C};\ |z-z_0| \le R \}$

(iii) Je-li $\sum_0^\infty a_n z^n = \sum_0^\infty b_n z^n$ v $U(0,\delta)$ $(\delta>0)$, pak
$a_n = b_n$, $n=0,1,2,\dots$ (analogické vlastnosti jako u polynomů)
(a $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$).

2) Vyšetřování poloměru, případně i oboru konvergence

(1.) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$ $\qquad \left(a_n = \frac{1}{n^p} \right)$

poloměr konvergence dle „vzorce":

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n} \right|^p = 1$$

$$\left(= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1 \right)$$

podrobněji užitím ucpi. D'alam. kritéria (pro abs. k.)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)^p} \cdot \frac{n^p}{z^n} \right| = \lim_{n\to\infty} |z| \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^p = |z| \text{ , tj.}$$

(D'alemb.) $\quad |z| < 1$ řada konv. abs. $\} \Rightarrow R = 1$
$\qquad |z| > 1$ řada diverguje

spec. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n\sqrt{n}}$ .. $R = 1$

pro $|z| = 1 = R$: $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ konv. (int. krit.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n\sqrt{n}}$ konv. pro $\forall z : |z| \le 1$ (a to abs.)

(2.) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$, $\quad a_n = \frac{n^n}{n!}$

poloměr konvergence:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

(3.) $\sum\limits_{2}^{\infty} \frac{z^n}{n \ln^2 n}$: $a_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$, $n = 2, 3, \dots$

poloměr konvergence:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \right)^2 = 1$$

konvergence pro $|z| = 1$:

$\sum\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ konverguje (integrální kritérium: $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$ k.),

tedy řada konverguje absolutně pro v. $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$,

tedy obor konvergence dané řady je $\overline{K(0,1)} = \{ z \in \mathbb{C} ;\ |z| \leq 1 \}$.

(a řada zde konverguje stejnoměrně)

(obecně R můžeš jednoduše určit D'Alam. kritéria pro ab. konvergenci)

(4.) $\sum\limits_{2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{3n}}{n \cdot \ln n}$: $a_n = \frac{(-1)^n}{n \ln n}$, $n = 2, 3, \dots$

stejně jako v př. 3 ... $R = 1$ (poloměr k.)

vyšetření konvergence pro $|z| = 1$:

$z_1 = -1$ ... $\sum\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverguje (opět integrální krit.:

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t} dt = +\infty)$$

řada jistě diverguje pro $z_2 = e^{\frac{\pi}{3} i}$, $z_3 = e^{\frac{5}{3} \pi i}$ (tj. pro z, pro které je $z^3 = -1$

pro $|z| = 1$, $z^3 \neq -1$: $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \neq \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$

dostaneme řadu

$\sum\limits_{2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n} e^{3n\varphi i}$ — konverguje dle Dirichletova kritéria.

neboť: 1) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n e^{3n\varphi i}$ má omezené částečné součty

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\ln n} = 0$, a $\left\{\frac{1}{n\ln n}\right\}\searrow$ (klesající posloupnost),

tedy (Dirichlet) $\sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)} \cdot e^{3n\varphi i}$ je řada konvergentní!

omezenost částečných součtů řady $\sum_{2}^{\infty}(-1)^n e^{3n\varphi i} = \sum_{2}^{\infty}\left(-e^{3\varphi i}\right)^n$

(geom. řada s $q=-e^{3\varphi i}$): $|S_k| = \left|\left(-e^{3\varphi i}\right)^2 \cdot \frac{1-\left(-e^{3\varphi i}\right)^{k+1}}{1+e^{3\varphi i}}\right| \leq \frac{2}{\left|1+e^{3\varphi i}\right|}$ $(\forall k=1,2\ldots)$

$\left(1+e^{3\varphi i} \neq 0\right.$, neboť $\left. e^{3\varphi i} \neq -1\right)$

5) $\sum_{0}^{\infty} a^{n^2} z^n$; $a\in(0,1)$: $a_n = a^{n^2}$

poloměr konvergence:

R : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} a^n = 0$ $(0<a<1) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $R = +\infty$, řada konverguje v $\mathbb{C}$

nebo jednoduše absolutní konvergence:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|a^{n^2} z^n\right|} = \lim_{n\to\infty} |z| \sqrt[n]{a^{n^2}} = 0$, tedy řada k.

pro lib. $z\in\mathbb{C}$

6) **DÚ** Vypočtěte poloměr konvergence u řad

(i) $\sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{a^n+b^n}$, $a,b>0$; $(R = \max(a,b))$

(ii) $\displaystyle\sum_{0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \cdot z^n \qquad (R = 27)$

(7) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} \cdot z^n \quad : \quad a_n = \frac{(3+(-1)^n)^n}{n}$

Poloměr konvergence :

posloupnost $\displaystyle\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{3+(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ nemá limitu :

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{|a_{2k}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{4}{\sqrt[2k]{2k}} = 4 ,$$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k+1]{|a_{2k+1}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{\sqrt[2k+1]{2k+1}} = 2$$

dle f. zde lze : $\displaystyle R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{4} \qquad \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 4\right)$

Vyšetření pro $|z| = \frac{1}{4}$

nejprve $z = \frac{1}{4}$: $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{3+(-1)^n}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$ diverguje :

Rozmyslete, že platí :

mějme $\sum_{1}^{\infty} \alpha_n$, nechť $\sum_{1}^{\infty} \alpha_{2k}$ a $\sum_{1}^{\infty} \alpha_{2k+1}$ jsou konvergentní, pak také $\sum_{1}^{\infty} \alpha_n$ konverguje;

když $\sum_{1}^{\infty} \alpha_{2k}$ diverguje, $\sum_{1}^{\infty} \alpha_{2k+1}$ konverguje, pak $\sum \alpha_n$ diverguje.

(V našem příkladu: $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ diverguje, $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} \cdot \frac{1}{2k+1}$ konverg.)

Tedy, na kružnici $|z| = \frac{1}{4}$ může řada konvergovat jen neabsolutně:

$|z| = \frac{1}{4}$ ... $z = \frac{1}{4} e^{i\varphi}$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, pak:

$$\sum_1^\infty \left(\frac{3+(-1)^n}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{n} \cdot e^{in\varphi} \quad ; \qquad (e^{i\varphi} \neq 1)$$

opět použijeme Dirichletovo kritérium: – zde na řady sudých, resp. lichých členů:

$\sum_1^\infty e^{in\varphi}$ má omezenou posloupnost částečných součtů

(geom. řada – $|S_k| = \left| e^{i\varphi}\frac{1-e^{i\varphi k}}{1-e^{i\varphi}}\right| \le \frac{2}{|1-e^{i\varphi}|}$)

pro $n = 2k$: posloupnost $\left\{\frac{1}{2k}\right\}$ je klesající a má limitu 0

pro $n = 2k+1$: posloupnost $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} \cdot \frac{1}{2k+1}\right\}$ —"—)

tedy, konvergují řady sudých i lichých členů zkoumané řady (Dirichlet), tedy dle poznámky na str. 7 konverguje i řada

$$\sum_1^\infty \left(\frac{3+(-1)^n}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{n} e^{in\varphi}$$, tj. řada konv. pro $\forall\ |z| = \frac{1}{4}$, $z \neq \frac{1}{4}$

Dú (8) Najděte poloměr konvergence (případně i obor konvergence) řady:

1) $$\sum_1^\infty \frac{3^n+(-2)^n}{n}(z+1)^n$$

($R = \frac{1}{3}$), kruh konvergence $K(-1; \frac{1}{3})$

$z+1 = \frac{1}{3}$ ... řada diverguje

tedy pro $|z+1| = \frac{1}{3}$ nemůže konvergovat absolutně ($z+1 \neq \frac{1}{3}$)

2) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(3x+1)^k}{k^2 \cdot 2^k}$ ($z_0 = -\frac{1}{3}$, $R = \frac{2}{3}$)

($= \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{k^2} \left(z+\frac{1}{3}\right)^k$ nebo vyjádřit R pomocí D'Alamb. nebo Cauchy)

pro $\left|z+\frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3}$ řada konverguje absolutně ... ($\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$)

3) Najděte obor konvergence (v $\mathbb{R}$) řady $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$;

(lze užít substituci $\frac{1-x}{1+x} = y$ a vlastností mocninné řady)

(řada konverg. lokálně stejnoměrně v $(0, +\infty)$)

3, Sčítání mocninných řad

Známé součty:

$$\sum_{0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \text{ v } K(0;1), \quad \sum_{0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z \text{ v } \mathbb{C},$$

$$\sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cos z \text{ v } \mathbb{C}, \quad \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin z \text{ v } \mathbb{C},$$

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cosh z \text{ v } \mathbb{C}, \quad \sum_{0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh z \text{ v } \mathbb{C}$$

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x), \quad x \in (-1, 1\rangle$$

Mnohé mocninné řady lze sečíst tak, že se k výše uvedeným řadám „dostaneme" derivováním nebo integrováním řad, jejichž součty hledáme.

Příklady.

① Sečtěte $\sum\limits_0^\infty \frac{2^n(n+1)}{n!}$.

Řada konverguje (např. dle D'Alamb. limitního kritéria).

$$\sum_0^\infty \frac{2^n(n+1)}{n!} = \sum_0^\infty\left(\frac{2^n n}{n!}+\frac{2^n}{n!}\right) \underset{(*)}{=} 2\sum_1^\infty \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_0^\infty \frac{2^n}{n!} =$$

$$= 2\sum_0^\infty \frac{2^n}{n!}+\sum_0^\infty\frac{2^n}{n!} = 3e^2$$

(*) – $\sum\limits_1^\infty a_n$, $\sum\limits_1^\infty b_n$ konvergují $\Rightarrow$ konverguje také $\sum\limits_1^\infty(a_n+b_n)$ a
$\sum\limits_1^\infty(a_n+b_n)=\sum\limits_1^\infty a_n+\sum\limits_1^\infty b_n$ (limita součtu)

② DÚ – Podobně $\sum\limits_0^\infty \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = \frac{\cos 1 - \sin 1}{2}$

a $\sum\limits_0^\infty \frac{n^2+1}{2^n\, n!} x^n = \left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1\right)\cdot e^{\frac{x}{2}}$, $x\in\mathbb{R}$

③ Sečtěte $\sum\limits_1^\infty \frac{x^n}{n}$ (v oboru konvergence, $x\in\mathbb{R}$)

$\sum\limits_1^\infty \frac{x^n}{n}$ konverguje v $\langle -1, 1)$ (poloměr konvergence $R=1$)

v $(-1,1)$ lze řadu derivovat člen po členu, tj. označíme-li $f(x)$ součet dané řady, je v $(-1,1)$

$$f'(x) = \left(\sum_1^\infty \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_1^\infty x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$ (součet geometrické řady)

tj. $f(x) = -\ln(1-x) + c$, pro $x=0$: $0 = c$

tj. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ v $(-1,1)$

řada konverguje i v $x=-1$, tj. $f(x)$ je spojitá v bodě $x=-1+$, stejně tak i funkce $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$, tj. $\sum\limits_1^\infty \frac{x^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ v $\langle -1,1)$

(4) Vyšetřujme řadu $\sum\limits_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$

Poloměr konvergence ... $R = 1$, tj. řada konverg. absolutně a lokálně stejnoměrně v $(-1,1)$

V bodech $x = \pm 1$ konverguje neabsolutně (Leibniz), tedy, obor konvergence je $\langle -1,1 \rangle$ (řadu vyšetřujeme v $\mathbb{R}$)

Součet řady: označme $f(x)$ součet řady v $\langle -1,1\rangle$, pak

$$\text{v } (-1,1): \; f'(x) = \sum_0^\infty (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \quad (\text{geom. řada s } q = -x^2)$$

tedy zde $f(x) = \operatorname{arctg} x + C$, dosadíme-li $x = 0$, dostaneme $C = 0$,

tedy, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in (-1,1)$

Protože řada konverguje i v bodech $x = \pm 1$, je součet řady spojitá fce v $\langle -1,1\rangle$ (Abelova věta), $\operatorname{arctg} x$ je též spojitá fce v $\langle -1,1\rangle$,

tj.
$$\sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} x \quad \text{v } \langle -1,1\rangle$$

tj. $(x = 1)$
$$\pi = 4 \cdot \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (*)$$

Poznámka! Řada (*) konverguje dost pomalu, nicméně lze „vylepšit" např. takto

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$$

(platí: $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$ pro $xy < 1$)

tedy
$$\pi = 4 \left[\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} \right) \right]$$

(5) Sečtěte řadu $\sum_{0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pro ta $x \in \mathbb{R}$, pro která řada konverguje.

poloměr konvergence je $R=1$, v $x=\pm 1$ řada diverguje

označíme-li součet řady v $(-1,1)$ $f(x)$, pak je

v $(-1,1)$ $\quad f'(x) = \sum_{0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$, a tedy

$f(x)$ je ta primitivní funkce k $\frac{1}{1-x^2}$ na $(-1,1)$, pro kterou $f(0)=0$, tj.

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad x \in (-1,1)$$

(6) DÚ Sečtěte řadu $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ $(x \in \mathbb{R})$

(poloměr konvergence $R=1$, řada konverguje v $\langle -1,1\rangle$,

$\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x)$, $x \neq 0$, pro $x=0$ je součet 0 –

$\left(\lim_{x\to 0} 1 + \frac{1-x}{x}\ln(1-x) = 0\right)$, spec. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ a

$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} = 1 - 2\ln 2$)

(návod – vyjádřete pomocí dané řady $(x f(x))''$ v $(-1,1)$ a pak integrujte ($f(x)$ znovu součet dané řady))

(7) Najděte součet řady $\sum_{0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$ $(x \in \mathbb{R})$

Řada konverguje v R; označme-li $f(x)$ její součet v $\mathbb{R}$,

$$\int f(x)\,dx = \int\left(\sum_{0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!} x^{2n}\right)dx = \sum_{0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!}\int x^{2n}\,dx = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} + C$$

$$= \sum_{0}^{\infty} x \cdot \frac{(x^2)^n}{n!} + C = x \cdot e^{x^2} + C, \text{ tedy}$$

$$f(x) = \left(x e^{x^2}\right)' = (1+2x^2)e^{x^2}, \quad x \in R$$

(8) V oboru konvergence ($\cap \mathbb{R}$) sečtěte řadu $\sum_1^\infty (n+1).n.x^{n-1}$.

$$\left(\sum_1^\infty (n+1).n\,x^{n-1} = \frac{2}{(1-x)^3} \; , \; x \in (-1,1) \right)$$

odtud sečtěte $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{(n+1).n}{2^n}$

(9) Užití mocninných řad pro vyjádření primitivních funkcí, a pro výpočet určitých integrálů.

1) Primitivní funkce k $f(x) = e^{-x^2}$ na R:

$$\int e^{-x^2} dx = \int \left(\sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \right) dx = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \int x^{2n} dx = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} + C$$

(integrovat lze v $\mathbb{R}$ člen po členu)

2) Primitivní fce k fci $f(x) = \begin{cases} 1 \, , & x = 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} \, , & x \neq 0 \end{cases}$ na R:

$$f(x) = \sum_0^\infty (-1)^{k-1} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$$

, řada $\overset{\text{na}}{\rightrightarrows}$ v R, lze tedy integrovat člen po členu

$$\int f(x) dx = \int \left(\sum_0^\infty (-1)^{k-1} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} \right) dx = \sum_0^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)!} \int x^{2k} dx =$$

$$= \sum_0^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)!\,(2k+1)} \cdot x^{2k+1} + C$$

3) $$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \sum_0^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)!(2k+1)} \left[x^{2k+1} \right]_0^1 = \sum_0^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1).(2k+1)!}$$

$$= 1 - \frac{1}{3.3!} + \frac{1}{5.5!} - \frac{1}{7.7!} + \cdots$$

4) **DU!** : Vyjádřete pomocí řady $\int_0^1 e^{-x^2}dx$. Pokuste se

$$\left(\sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)\cdot k!} \right)$$

odhadnout chybu při aproximaci částečným součtem.

4) Rozvoj funkce v mocninnou řadu

1) Rozviňte funkci $f(z) = e^{-z^2}$ v mocninnou řadu:

$$e^z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!} \quad \text{pro v. } z \in \mathbb{C}, \text{ tj.}$$

$$e^{-z^2} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!} z^{2n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

(rozvoj jsme již využili v příkladu 9/1,4 z minulé části)

2. Rozviňte funkci $f(x) = \cos^2 z$ v mocninnou řadu:

$$\cos^2 z = \frac{1+\cos 2z}{2} \quad \text{pro } z \in \mathbb{C}, \quad \text{protože } \cos z = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

tj.

$$\cos 2z = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n \cdot (2z)^{2n}}{(2n)!} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!} z^{2n}, \text{ tedy}$$

$$\cos^2 z = 1 + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

3. Rozviňte funkci $f(x) = \frac{x}{9+x^2}$ v mocninnou řadu:

$$f(x) = \frac{x}{9} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{x}{9} \cdot \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{9^n} = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$$

součet geom. řady s $q = -\left(\frac{x}{3}\right)^2$

$x \in (-3, 3)$

4. Rozviňte v mocninnou řadu funkci $f(x) = \dfrac{x}{(1+3x)^2}$:

Stačí rozvinout fci $\dfrac{1}{(1+3x)^2} = -\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1+3x}\right)' = -\dfrac{1}{3}\left(\sum_{0}^{\infty}(-3x)^n\right)'$

$$= \sum_{1}^{\infty}(-3)^{n-1} \cdot n x^{n-1} \quad \text{pro } |x| < \frac{1}{3}$$

pak $\dfrac{x}{(1+3x)^2} = \sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1} 3^{n-1} \cdot n x^n , \quad |x| < \dfrac{1}{3}$

DU! 5. Zkuste podobně rozvinout v mocninnou řadu fci

a) $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ $\quad \left(= 2 \sum_{0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} , \quad x \in (-1,1) \right)$

(obrácený postup k příkladu 5 a 3. části)

(návod – rozviňte v mocninnou řadu f')

b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ $\quad \left(= \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} , \; x \in \langle -1,1 \rangle \right)$

opět – rozviňte f' v $(-1,1)$,
pro body $x = \pm 1$ vyšetřete spojitost)
(viz příklad 4 a minulé části)